Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA-1116)
2^{do} Examen Parcial (35 %)
Abr-Jul 2011
Tipo A

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (8 pts.) (a) (3 pts.) Sea L_1 la recta intersección de los planos $\pi_1 : x + 2z = 5$ y $\pi_2 : y + 3z = 5$. Encuentre las ecuaciones simétricas de L_1.
   (b) (3 pts.) Sea P el punto intersección de la recta $L_2 : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ y el plano $\pi_3 : x-y+z = 7$. Ecuentre P.
   (c) (2 pts.) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a L_1 que pasa por P

2. (7 pts.) Halle el o los valores de α para que el vector $(1, \alpha, 2, 3\alpha)$ pertenezca a

$$\text{gen}\{(1,1,2,2),(5,9,10,14),(2,-4,10,-2),(5,27,4,32)\}$$

3. (7 pts.) Sea

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a + 2b = 0 \text{ y } 2c - d = 0 \right\}$$

un subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Encuentre una base para Ω y diga cuál es su dimensión.

4. (7 pts.) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Encuentre una base para la imagen, una base para el espacio nulo, una base para el espacio de renglones, el rango y la nulidad de A.

5. (6 pts.) Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine si es verdadera o falsa.
   (a) (3 pts.) P_2 con la suma definida por

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2 + 1)x^2$$

   y con el producto por escalar usual es espacio vectorial.
   (b) (3 pts.) Sean $\vec{u} = (-1, 2)$ y $\vec{v} = (3, 3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Entonces el ángulo entre el vector $\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}$ y el semieje X positivo es $\frac{\pi}{3}$

Segundo Parcial. Tipo A y B Miguel Guzman Matemática 3

Pregunta (1) Tipo A

a.- $\pi 1 = x + 2z = 5$ $\pi 2 = y + 3z = 5$

Resolvemos el sistema de las dos ecuaciones y reducimos forma Gauss

$$\mathrm{rref}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Despejamos y de la segunda ecuacion

$y = 5 - 3z$ sustituyendo en la primera

$x = 5 - 2z$

Nos piden la ecuacion simetrica, se tiene que $\dfrac{x-5}{-2} = \dfrac{y-5}{-3} = z$

b.- El punto de interseccion sera el valor de (x,y,z) que cumpla el plano. Se tiene que

$x = 1 + 4t$ $y = -3 + 2t$ $z = -2 + 3t$ Sustituyendo en la ecuacion del plano

$(1 + 4t) - (-3 + 2t) + (-2 + 3t) - 7 \rightarrow 5 \cdot t - 5$ De aqui que $t = 1$ Luego el punto sera

$$PTO = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c.- La recta paralela a la primera encontrada tiene los mismos vectores directores luego

$l2 := \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Y el punto que pasa por L2 sera el hallado anteriomente, las ecuaciones parametricas seran:

$$L2 := \left| \begin{array}{l} x = 5 - 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 + t \end{array} \right.$$

TIPO B

a.- Se despejan los valores de y y x en terminos de z y se buscan la ecuacion simetrica.

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y-4}{-2} = z$$

b.- Sustituimos las variable x, y z en la ecuacion del plano donde: $\left| \begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = -2 + 3t \end{array} \right.$

$-(-3 + 2t) + (1 + 4t) + (-2 + 3t) - 7 \rightarrow 5 \cdot t - 5$

Se tiene que $t = 1$ El punto sera $B := \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

c.- La recta que pasa por B y es paralela a L de a sera:

$$\left|\begin{aligned} x &= -1 - 3t \\ y &= 5 - 2t \\ z &= 1 + t \end{aligned}\right.$$

Pregunta 2 TIPO A

Hallar los valores de α para que el vector pertenesca al generado

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 \\ 3\alpha \end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + d\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 27 \\ 4 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema para que tenga solucion alguna.

Haciendo la matriz ampliada y reduccion de forma Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 9 & -4 & 27 & \alpha \\ 2 & 10 & 10 & 4 & 2 \\ 2 & 14 & -2 & 32 & 3\alpha \end{pmatrix} \text{ implica } \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 22 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\alpha \end{pmatrix}$$

Luego α debe ser $\alpha := \frac{1}{2}$

Para que el sistema tenga solucion

Y asi el vector pertenece.

TIPO B

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 2 \\ 4\alpha \end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} + d\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -6 & \alpha \\ 2 & 10 & 10 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 7 & -1 & 4\alpha \end{pmatrix} \text{ implica } \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 11 & 2 - \alpha \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\alpha - 2 \end{pmatrix}$$

luego $a := \frac{2}{3}$ para que el sistema tenga solucion

Y asi el vector pertenece

Pregunta 3 TIPO A

Sea el subespacio dado OJO ya estan diciendo que es subespacio NO HAY NECESIDAD DE DEMOSTRAR NADA.

Sabemos que $\Omega := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a = -2b$ $d = 2c$

Entonces $\Omega = \begin{pmatrix} -2b & b \\ c & 2c \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Esto nos indica que

$\Omega = \text{gen}\left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]$ Demostramos que son LI $\alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donde se tiene que $\alpha = \beta = 0$ Son LI se concluye que

$$\text{BASE}\Omega = \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] \qquad \text{Dimension}(\Omega) := 2$$

TIPO B

De igual forma nos dicen que es un subespacio luego NO HAY NECESIDAD DE DEMOSTRAR.

$\Omega := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ con $A = 2B$ $D = -3C$

$\Omega = \begin{pmatrix} 2B & B \\ C & -3C \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ Esto indica que $\Omega = \text{gen}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right]$

Los vectores son LI y se tiene que $\text{Base}\Omega = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right]$ $\text{Dimension}\Omega := 2$

Pregunta 4 TIPO A

La matriz $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ Buscamo Espacio Nulo (Na)

Los vectores de R4 que cumpla Ax=0

$$x := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Reducimos la matriz y nos queda

$$B := \mathrm{rref}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde se tiene de la primera ecuacion

$$x = -6z - 5w \qquad y = -4z - 2w$$

Entonces los vectores que pertenecen a Na (x) deben cumplir estas ecuaciones

$$X = \begin{pmatrix} -6z - 5w \\ -4z - 2w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esto nos indica

$$Na = \mathrm{gen}\left[\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Los vectores son LI luego

$$BaseNa = \left[\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Nulidad $\upsilon(A) := 2$

En cuanto a los renglones si reducimos A en forma Gauss

$$B := \mathrm{rref}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos damos cuenta que las filas distinta de cero seran LI del espacio generado por los renglones luego

$$BaseRa = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

Para el rango podemos Transponer la matriz A

$$A^T \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Y hacemos Gauss a esta Matriz

$$\mathrm{rref}\left(A^T\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos damos cuenta que los renglones de At sera las columnas de A luego por teorema el espacio Columna de A sera equivalente a la Imagen de A. Dado que se redujo la matriz At los vectores distintos de cero seran L entonces

$$Rat = Ca = ImA = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde rango $\rho(A) := 2$

Se verifica que $\upsilon + \rho = 4$

TIPO B

La matriz $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Buscamo Espacio Nulo (Na)

Los vectores de R4 que cumpla Ax=0 $x := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$

Reducimos la matriz y nos queda

$$B := \text{rref}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde se tiene de la primera ecuacion

$x = -5z - 6w$ $y = -2z - 4w$

Entonces los vectores que pertenecen a Na (x) deben cumplir estas ecuaciones

$$X = \begin{pmatrix} -5z - 6w \\ -2z - 4w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esto nos indica $\text{Na} = \text{gen}\left[\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

Los vectores son LI luego $\text{BaseNa} = \left[\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ Nulidad $\upsilon(A) := 2$

En cuanto a los renglones si reducimos A en forma Gauss

$$B := \text{rref}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos damos cuenta que las filas distinta de cero seran LI del espacio generado por los renglones luego

$$\text{BaseRa} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$$

Para el rango podemos Transponer la matriz A $A^T \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Y hacemos Gauss a esta Matriz

$$\text{rref}\left(A^T\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos damos cuenta que los renglones de At sera las columnas de A luego por teorema el espacio Columna de A sera equivalente a la Imagen de A. Dado que se redujo la matriz At los vectores distintos de cero seran L entonces

$$\text{Rat} = \text{Ca} = \text{ImA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ donde rango $\rho(A) := 2$

Se verifica que $\upsilon + \rho = 4$

Pregunta 5 TIPO A

a.- Dado el espacio vectorial con la suma definida dara que es FALSO, el axioma que no se cumple (uno de ellos) es el 5

Axioma 4 $x + 0 = x$ $\left(a0 + a1x + a2x^2\right) + \left(X + Yx + Zx^2\right) = a0 + a1x + a2x^2$

$$a0 + X + (a1 + Y)x + (a2 + Z + 1)x^2 = a0 + a1x + a2x^2$$ Se despeja $\left|\begin{matrix} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = -1 \end{matrix}\right.$

Luego el elemento nulo es $0 = -x^2$

Axioma 5 $x - x = 0$

$$\left[\left(a0 + a1x + a2x^2\right) - \left(a0 + a1x + a2x^2\right) = a0 + a1x + a2x^2 + \left(-a0 - a1x - a2x^2\right) = \left(0 + 0x + 1x^2\right)\right] \neq -x^2$$

b.- Buscamos la proyeccion $u := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\text{proyUv} := \frac{u \cdot v}{\left(|v|\right)^2} v \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

El vector director del semieje X positivo es $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego para hallar el valor del angulo de Proy entre X podemos hacer el producto punto

$$\alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{\text{proyUv} \cdot x}{|\text{proyUv}| \cdot |x|}\right) \rightarrow \frac{\pi}{4}$$ lo cual es distinto a $\frac{\pi}{3}$ FALSO

TIPO B

a.- Dado el espacio vectorial con la suma definida dara que es FALSO, el axioma que no se cumple (uno de ellos) es el 5

Axioma 4 $x + 0 = x$ $\left(a0 + a1x + a2x^2\right) + \left(X + Yx + Zx^2\right) = a0 + a1x + a2x^2$

$$a0 + X + (a1 + Y - 1)x + (a2 + Z)x^2 = a0 + a1x + a2x^2$$ Se despeja $\left|\begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 1 \\ Z = 0 \end{array}\right.$

Luego el elemento nulo es $0 = x$

Axioma 5 $x - x = 0$

$$\left[\left(a0 + a1x + a2x^2\right) - \left(a0 + a1x + a2x^2\right) = a0 + a1x + a2x^2 + \left(-a0 - a1x - a2x^2\right) = \left(0 - 1x + 0x^2\right)\right] \neq x$$

b.- Buscamos la proyeccion $u := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$proyUv := \frac{u \cdot v}{(|v|)^2} v \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

El vector director del semieje X positivo es $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego para hallar el valor del angulo de Proy entre X podemos hacer el producto punto

$$\alpha := acos\left(\frac{proyUv \cdot x}{|proyUv| \cdot |x|}\right) \rightarrow \frac{\pi}{4}$$ lo cual es distinto a $\frac{\pi}{3}$ FALSO

OJO CUALQUIER AXIOMA QUE NO SE CUMPLE Y UD LO DEMOSTRO COMO SE DEBE ES VALIDO, RECUERDE QUE CON TAN SOLO NO SE CUMPLE UNO YA NO ES ESPACIO VECTORIAL. YO SOLO PRESENTO UN AXIOMA QUE FUE EL QUE ME DI CUENTA QUE NO SE CUMPLIA.